

**Esempio 6.24** Dire per quali valori di  $x$  converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k 2^k}$$

**Attenzione!** Nonostante la presenza del fattore  $(-1)^k$  la serie non è a termini di segno alterno, perché  $x^k$  non è sempre positivo.

Possiamo comunque applicare il criterio dell'assoluta convergenza, cercando dove converge la serie dei valori assoluti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k 2^k}$$

Applicando il criterio della radice, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k 2^k}} = \frac{|x|}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{|x|}{2}$$

e pertanto la serie converge assolutamente per  $|x| < 2$ .

Se  $|x| > 2$ , la successione  $|a_k|$  tende all'infinito, e dunque la serie  $\sum a_k$  non può convergere, dato che il termine  $a_k$  non tende a zero.

Restano da esaminare i casi  $x = 2$  e  $x = -2$ . Nel primo caso la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Se invece  $x = -2$  si ottiene la serie armonica  $\sum \frac{1}{k}$ , che diverge.

In conclusione, la nostra serie converge per  $-2 < x \leq 2$  e non converge per i valori di  $x$  fuori di questo intervallo.  $\square$

### Esercizi

**6.16.** Dire se convergono le serie seguenti:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{6}}{n^2}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln(n^2+1)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n}$$

**6.17.** Dire per quali  $x \in \mathbf{R}$  convergono le serie seguenti:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+x)^n}$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x+n}{2+n^3 x^2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^n$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n x^n}$$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln n$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^n}}{1+x^n}$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{nx}}{1+2^{n x^2}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x^n$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-\sqrt{n}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+n|x|^n)$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} x^{n x} \quad (x > 0)$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2x)^n}$$

$$9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^n}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin(n!x)$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n x^n}$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(3+2x)^n}$$

$$28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} 2^{nx}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln n}}$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{n!}$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^{2n+1}$$

$$31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3 + (\ln x)^{2n}}$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n!}$$

$$32. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^{n^2}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2 x}{n^2 + x^2}$$

$$17. \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1+x}{1+n^2 x^2} \right)^n$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + \sin \frac{x}{n}}{n^x}$$